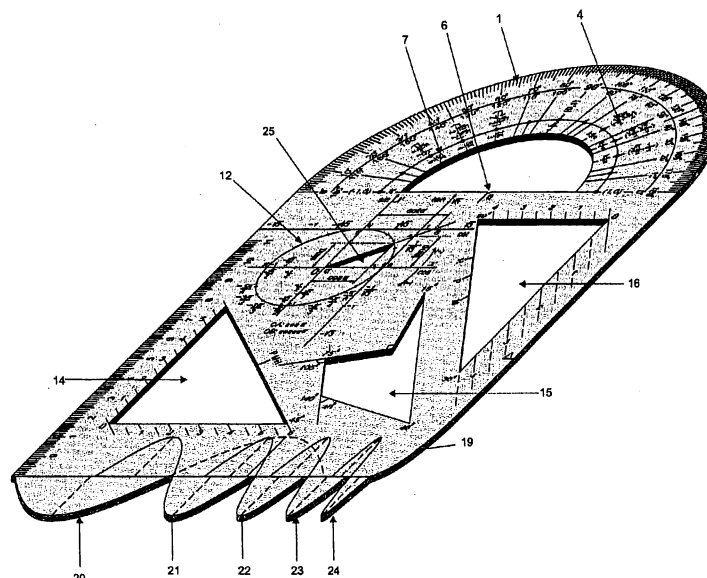




### **Lĩnh vực kỹ thuật được đề cập**

Sáng chế đề cập đến thước dùng trong giáo dục phổ thông, cụ thể là thước dùng trong môn toán về góc và hàm lượng giác và các lĩnh vực kỹ thuật ứng dụng.

### **Tình trạng kỹ thuật của sáng chế**

Hiện nay, trên thị trường có rất nhiều loại thước kẻ dùng trong giáo dục như thước kẻ đường thẳng, thước đo độ dài có vạch chia đến milimét, thước đo góc, thước cong, thước compa, thước tổ hợp các hình hình học cơ bản như hình vuông, hình tròn, hình chữ nhật, hình bình hành, hình elip, hình thang, v.v..

Tài liệu sáng chế CN 202557079 U bộc lộ thước nhiều chức năng với thân thước là sự tổ hợp các hình học cơ bản như các hình tròn, các đa giác đều như hình tam giác, hình vuông, hình ngũ giác, hình lục giác, hình bát giác kết hợp với thước đo góc.

Tài liệu sáng chế CN 2300524 Y bộc lộ thước nhiều chức năng dùng cho sinh viên với thân thước là sự tổ hợp của cơ cấu trượt đẩy tĩnh, có cơ cấu định vị quay được tổ hợp với chức năng vẽ đường thẳng, đường cong, các hình phẳng và hình khối.

Tuy nhiên, thước của các sáng chế nêu trên chỉ thực hiện các chức năng vẽ các hình hình học hoặc đo góc mà không trợ giúp hoặc trợ giúp rất ít trong giảng dạy các khái niệm cơ bản của môn toán về hàm lượng giác và mối quan hệ giữa góc với hàm lượng giác một cách trực quan. Việc tính toán xác định giá trị của một hàm số lượng giác thường phải sử dụng đến công cụ trợ giúp là máy tính hay bảng số tính sẵn, những dụng cụ này đôi khi trong thực tế không phải lúc nào cũng có sẵn để sử dụng. Mặt khác hàm số lượng giác sau khi khảo sát xong thường phải vẽ bằng tay để nối các điểm của đồ thị nên đường cong đồ thị thường xấu và không chính xác.

Đối với học sinh phổ thông, khái niệm hàm lượng giác còn mới và khó hình dung. Ở Việt Nam cũng như trên thế giới được biết cho đến nay cũng chưa có một loại thước nào được thiết kế dành cho học sinh phổ thông chuyên sâu về góc và hàm lượng giác một cách đầy đủ. Hơn nữa, chương trình cải cách giáo dục, đổi mới phương pháp dạy học cũng đòi hỏi phải nâng cao chất lượng của thiết bị giáo dục và dụng cụ học tập cho học sinh theo hướng tích cực, tích hợp nhiều chức năng, giảm bớt các dụng cụ học tập có tính sao chép đơn giản, hỗ trợ tích cực cho người sử dụng có tư duy sâu hơn về mối quan hệ giữa góc và hàm lượng giác, giảm bớt việc phải nhớ một cách máy móc những con số cụ thể về giá trị của các hàm lượng giác ở các góc đặc biệt một cách “quá tải” như hiện nay. Đồng thời giúp cho học sinh có trong tay một dụng cụ hữu hiệu để vẽ chính xác, vẽ nhanh, vẽ đẹp đồ thị của các dạng hàm số lượng giác.

Vì vậy, một nhu cầu đặt ra là cần sáng tạo một dụng cụ học tập được tích hợp tối đa các yếu tố chức năng để người sử dụng không những xác định được nhanh giá trị các hàm lượng giác của các góc đặc biệt đã được tính toán sẵn trên thước mà còn xác định được giá trị lượng giác của một góc bất kỳ, bằng phép đo độ dài. Đồng thời, giúp cho học sinh có một dụng cụ học tập “chuẩn” để vẽ tương đối chính xác, nhanh và đẹp đồ thị của các dạng hàm số lượng giác, qua đó nâng cao được kiến thức lượng giác cơ bản, kích thích lòng say mê, khám phá cái mới, tính thẩm mỹ và lòng yêu thích toán học.

### **Bản chất kỹ thuật của sáng chế**

Do đó, mục đích của sáng chế là đề xuất một loại dụng cụ học tập cần thiết, là thước dùng trong dạy và học môn toán về góc và các hàm lượng giác ở bậc phổ thông.

Thước là một dụng cụ học tập tích cực, được tích hợp đầy đủ các yếu tố cơ bản về góc và các hàm lượng giác gồm: hàm sin, hàm cos, hàm tan, hàm cot, hàm sec, hàm cosec. Trong đó, thước đã tích hợp đủ các chức năng cơ bản tương tự như của các thước có trên thị trường gồm: chức năng đo độ được chia vạch đến một độ, diễn tả theo cả hai chiều đo, từ trái qua phải hoặc từ phải qua trái, đục thủng các góc đặc biệt ( $30^0$ ,  $45^0$ ,  $60^0$ ,  $90^0$ ) để người sử dụng vẽ được nhanh và chính xác các góc đó.

Thước theo sáng chế được tích hợp thêm các chức năng mới gồm:

- Chức năng diễn tả độ lớn của các góc đặc biệt bằng radian từ  $0^0$  đến  $360^0$ ;
  - Chức năng ghi giá trị cụ thể của bốn hàm lượng giác cơ bản gồm hàm sin, hàm cos, hàm tan, hàm cot của các góc đặc biệt trên phần thước đo độ, từ  $0^0$  đến  $180^0$  và được mở rộng trên thân thước trong phạm vi góc từ  $0^0$  đến  $360^0$ , nhằm giảm bớt việc ghi nhớ con số một cách máy móc, không cần thiết cho người sử dụng;
  - Chức năng thay việc tính toán giá trị của các hàm lượng giác gồm: hàm sin, hàm cos, hàm tan, hàm cot, hàm sec, hàm cosec của một góc bất kỳ bằng một phép đo độ dài đơn giản nhờ sử dụng các mối liên kết đặc trưng về tính chất bằng nhau của hai góc so le, góc có cạnh tương ứng vuông góc và tính chất đồng dạng của các hình hình học;
  - Chức năng vẽ nhanh và chính xác đường cong đồ thị của các hàm lượng giác bằng việc lập một tổ hợp các đường cong trên thước thỏa mãn các điều kiện của hai quy luật:
    - + Quy luật đại diện: mỗi đường cong đại diện cho ít nhất một hoặc một nhóm các đường cong đồ thị của hàm sin (hoặc hàm cos), hàm tan (hoặc cot);
    - + Quy luật chọn đường cong có dạng đường cong của hàm sin (hoặc hàm cos), có hệ số tỉ lệ và hệ số chu kỳ thay đổi theo quy luật của một dãy cấp số nhân với công bội  $2^n$  nhằm mục đích chia nhỏ độ sai lệch giữa đồ thị hàm số lượng giác với đường cong đặt trên thước về mức bằng không hoặc mức thấp nhất có thể chấp nhận được mà không làm thay đổi hình dạng và bản chất của đường cong đồ thị hàm số lượng giác.
- Thước theo phương án thực hiện sáng chế được tích hợp thêm các chức năng mới sẽ giúp học sinh, giáo viên và những người học tập môn toán phổ thông có những lợi ích sau:
- Hiểu được một cách đầy đủ, rõ ràng và chính xác hơn mối liên kết giữa yếu tố góc với giá trị của các hàm lượng giác, qua đó nâng cao được năng lực nhận thức về tính chất, đặc điểm của một hàm số lượng giác, một dạng hàm số siêu việt;
  - Xác định được nhanh giá trị của các góc đặc biệt bằng radian, giá trị hàm số gồm hàm sin, hàm cos, hàm tan, hàm cot, hàm sec, hàm cosec của các góc đó;

- Đo và xác định được nhanh, tương đối chính xác giá trị hàm sin, hàm cos, hàm tan, hàm cot, hàm sec, hàm cosec của một góc bất kỳ chỉ bằng một phép đo đơn giản;

- Thực hành vẽ nhanh, vẽ chính xác các góc đặc biệt ( $0^0$ ;  $15^0$ ;  $30^0$ ;  $40^0$ ;  $45^0$ ;  $60^0$ ;  $75^0$ ;  $90^0$ ) có sẵn trên thước và dễ dàng vẽ được các góc kẻ bù:  $105^0$ ;  $120^0$ ;  $135^0$ ;  $150^0$ ;  $165^0$ ;  $180^0$ ), đặc biệt có hai góc  $15^0$  và  $40^0$ , để người sử dụng vận dụng vào thực tiễn: góc  $15^0$  ứng dụng trong tính toán độ dài cắt tôn lợp của mái nhà và góc  $40^0$  ứng dụng trong vẽ độ dốc cầu thang trong nhà;

- Thực hành vẽ nhanh các hình hình học đồng dạng thường hay sử dụng.

Để đạt được mục đích và chức năng nêu trên, sáng chế đề xuất thước có dạng tấm phẳng dùng trong giáo dục phổ thông về góc và hàm số lượng giác. Thước này bao gồm:

Phần thân thước bao gồm ít nhất một nửa hình vành khăn nằm ở phía trên của thước, một phần cạnh thẳng làm thước đo độ dài nằm ở phía bên trái của thước, các tổ hợp đường cong đồ thị nằm ở cạnh dưới và biên cạnh bên phải của thước và các hình hình học;

Khác biệt ở chỗ:

Các lỗ hình hình học bao gồm: một lỗ hình tam giác vuông có hai góc nhọn bằng  $30^0$  và  $60^0$ , nằm ở phía bên phải của thước và nằm cạnh đường cong hàm tan là biên cạnh phải của thước; một lỗ hình tam giác vuông cân ở phía bên trái của thước; một lỗ hình đa giác nằm giữa hai lỗ hình tam giác vuông cân và lỗ hình tam giác vuông có hai góc nhọn bằng  $30^0$  và  $60^0$ . Phía trên lỗ hình tam giác vuông cân có một đường tròn lượng giác và một lỗ hình tam giác vuông có cạnh huyền bằng bán kính vòng tròn lượng giác, đặt trong một hệ trục tọa độ với các trục lượng giác sin, cos, tan và cot. Cạnh biên phía dưới và bên phải của thước gồm tổ hợp một dãy các đường cong thỏa mãn hai quy luật gồm quy luật đại diện cho ít nhất một hoặc một nhóm các đường cong đồ thị của các dạng hàm số lượng giác và quy luật chọn mẫu, có chu kỳ thay đổi theo dãy cấp số nhân, sao cho các đường cong trên thước có thể được kết hợp với nhau để tạo ra đường biểu diễn đồ thị của một hàm số lượng giác bất kỳ.

Thước còn khác biệt ở chỗ:

Trên nửa hình vành khăn của thân thước, trong đó các lỗ hình hình học gồm có các lỗ tròn nhỏ, đường kính dưới 3,0mm, đánh dấu độ lớn của các góc chênh lệch nhau  $15^0$ , trong khoảng từ  $0^0$  đến  $180^0$ . Bên cạnh lỗ đánh dấu các góc đặc biệt ( $30^0$ ,  $45^0$ ,  $60^0$ ,  $90^0$ ,  $120^0$ ,  $135^0$ ,  $150^0$ ) có ghi giá trị góc tính bằng radian và giá trị của hàm cos và hàm sin của góc đó.

Theo một phương án của sáng chế, trên thân thước, vòng tròn lượng giác có bán kính được định nghĩa bằng một đơn vị. Liên kết với vòng tròn lượng giác có bốn trục lượng giác và một lỗ hình tam giác vuông. Bốn trục lượng giác gồm trục sin, nằm trên trục y, từ điểm (0, 1) đến điểm (0, -1); trục cos nằm trên trục x, từ điểm (1, 0) đến điểm (-1, 0) vuông góc với trục sin; trục tan song song với trục y, đi qua điểm có tọa độ (1, 0); trục cot song song với trục x, đi qua điểm có tọa độ (0, 1). Trên các trục lượng giác có vạch đánh dấu ghi giá trị của hàm lượng giác tại các góc đặc biệt gồm các góc ( $\pm\pi/6$ ;  $\pm\pi/4$ ;  $\pm\pi/3$ ;  $\pm\pi/2$ ;  $\pm 2\pi/3$ ;  $\pm 3\pi/4$ ;  $\pm 5\pi/6$ ;  $\pi$ ). Một lỗ hình tam giác vuông có một góc nhọn  $\alpha$ , độ dài cạnh huyền bằng một đơn vị. Các cạnh của lỗ hình tam giác vuông, được nối dài liên kết với các trục lượng giác. Nhờ tính chất đồng dạng của các tam giác vuông, cho phép xác định giá trị của các hàm sin, hàm cos, hàm tan, hàm cot, hàm sec, hàm cosec (hàm csc) của một góc bất kỳ  $\alpha$  bằng phép đo độ dài.

Theo một phương án sáng chế, thay cho phương án sử dụng vòng tròn lượng giác nêu trên, thước còn đề xuất một phương án khác bao gồm một lỗ hình tam giác vuông có hình dạng, kích thước, độ lớn góc và vị trí liên kết với một tổ hợp gồm hai hình tam giác vuông đồng dạng liền kề, trong đó một lỗ hình tam giác vuông có một góc nhọn  $\alpha$  và cạnh huyền có giá trị bằng một đơn vị, có ít nhất hai tam giác vuông đồng dạng có góc nhọn so le nhau, hai tam giác vuông đồng dạng có hai góc bằng nhau theo tính chất góc có cạnh tương ứng vuông góc. Nhờ mối liên kết này, độ dài các cạnh của ba hình tam giác cũng tương ứng với giá trị của các hàm  $\sin\alpha$ ,  $\cos\alpha$ ,  $\tan\alpha$ ,  $\cot\alpha$ ,  $\sec\alpha$ ,  $\csc\alpha$  (csc $\alpha$ ), giúp người sử dụng thước thay vì phải tính toán phức tạp có thể đo độ dài cạnh tam giác để xác định giá trị của hàm lượng giác một cách tương đối chính xác.

Theo một khía cạnh của sáng chế, các lỗ hình hình học có các góc đặc biệt trên thân thước bao gồm: một lỗ hình tam giác vuông cân có các góc đặc biệt ( $45^0$ ;  $90^0$ ), một lỗ hình tam giác vuông có các góc đặc biệt ( $30^0$ ;  $60^0$ ;  $90^0$ ) và một lỗ hình đa giác có các góc thường sử dụng nhiều trong thực tế ( $15^0$ ;  $40^0$ ;  $75^0$ ;  $140^0$ ;  $270^0$ ), giúp người sử dụng vẽ được nhanh chóng, chính xác các góc này.

Theo một khía cạnh của sáng chế, dọc hai cạnh bên của hai lỗ hình tam giác vuông có các vạch kẻ song song với cạnh huyền, cách đều nhau, để người sử dụng vẽ được nhanh chóng, chính xác các hình tam giác đồng dạng.

Theo một khía cạnh của sáng chế, trên cạnh huyền của hai lỗ hình tam giác vuông có các vạch đánh dấu chân đường cao, điểm giữa cạnh và chân đường phân giác của góc vuông đối diện.

Theo một khía cạnh của sáng chế, trên cạnh bên bên dưới thước gồm tổ hợp một dãy các đường cong có hình dạng, kết cấu thỏa mãn quy luật đại diện cho ít nhất một hoặc một nhóm các đường cong đồ thị của hàm số dạng hình sin:  $y = \gamma \sin \frac{kx}{a}$ .

Khi dịch chuyển thước dọc theo trục biến số  $x$  đi một đoạn bằng độ lệch pha  $\frac{\pi|a|}{2k}$ , tổ hợp một dãy các đường cong này cũng có hình dạng, kết cấu thỏa mãn quy luật đại diện cho ít nhất một hoặc một nhóm các đường cong đồ thị của hàm số dạng:  $y = \gamma \cos \frac{kx}{a}$ , (với  $a$  là hệ số tỉ lệ,  $a \neq 0$ ,  $\gamma$  là hệ số biến dạng,  $k$  là hệ số chu kỳ). Các đường cong có một nửa chu kỳ là biên dạng cạnh của thước, một nửa chu kỳ nằm trên thước diễn tả bằng vạch kẻ liền nét hoặc đứt nét. Điểm cực trị của đường cong có vạch đánh dấu. Dãy đường cong hình sin được lựa chọn làm đại diện có chu kỳ thay đổi theo hệ số  $k$  hoặc tuân theo quy luật của dãy số cấp số nhân với công bội bằng  $k = 2^n$  ( $n$  là số nguyên dương).

Theo một khía cạnh của sáng chế, trên cạnh bên bên phải thước, có dạng đường cong dạng hàm tan có hình dạng, kết cấu thỏa mãn đại diện cho ít nhất một hoặc một nhóm các đường cong đồ thị của hàm tan:  $y = b \tan \frac{x}{b}$ . Đường cong này tiệm cận với đường thẳng trục tung ( $y$ ), song song với cạnh bên bên trái thước. Khi lật thước từ phải

qua trái, đường cong này có hình dạng, kết cấu cũng thỏa mãn đại diện cho ít nhất một hoặc một nhóm các đường cong đồ thị của hàm cot:  $y = b \cot \frac{x}{b}$ , với  $x$  trong khoảng từ 0 đến  $\pi/2$ ,  $b$  là hệ số tỉ lệ có giá trị bất kỳ khác không ( $b \neq 0$ ).

### **Mô tả vắn tắt các hình vẽ**

H.1a là hình vẽ thể hiện phối cảnh tổng thể của thước theo một phương án thực hiện sáng chế;

H.1b là hình vẽ thể hiện phối cảnh tổng thể của thước theo một phương án khác của sáng chế;

H.2a là hình vẽ thể hiện diễn tả bố cục tổng thể của thước theo một phương án;

H.2b là hình vẽ thể hiện diễn tả bố cục tổng thể của thước theo một phương án khác của sáng chế;

H.3 là hình vẽ thể hiện một nửa hình vành khăn có các góc đặc biệt ghi giá trị radian và giá trị hàm cos và sin tương ứng của góc đặc biệt đó;

H.4a là hình vẽ diễn tả phương án vòng tròn lượng giác;

H.4b là hình vẽ diễn tả phương án tam giác vuông đồng dạng mẫu;

H.5a là hình vẽ diễn tả lỗ hình tam giác vuông và lỗ hình đa giác có các góc đặc biệt;

H.5b là hình vẽ diễn tả các hình tam giác đồng dạng vẽ được;

H.6a là hình vẽ diễn tả dãy đường cong hình sin trên thước;

H.6b là hình vẽ diễn tả ứng dụng thực tế về độ sai lệch tương đối giữa đường cong với đồ thị của một hàm số lượng giác cụ thể;

H.7a là hình vẽ diễn tả đường cong hàm tan trên thước.

H.7b là hình vẽ diễn tả ứng dụng thực tế về độ sai lệch tương đối giữa đường cong với đồ thị của một hàm số lượng giác cụ thể.

### **Mô tả chi tiết sáng chế**

Sáng chế sẽ được mô tả chi tiết hơn, có dựa vào các hình vẽ minh họa kèm theo.



Việc mô tả chi tiết các phương án thực hiện sáng chế, sau đây có dựa vào hình vẽ chỉ nhằm minh họa sáng chế mà không nhằm làm giới hạn sáng chế.

Theo một phương án của sáng chế, thước được mô tả trên các hình vẽ là một tấm phẳng gồm: ít nhất một nửa hình vành khăn 1 nằm ở phía trên của thước làm thước đo góc có các vạch chia đến  $1^0$ ; một phần cạnh thẳng làm thước đo độ dài 13 nằm ở phía bên trái của thước có chia vạch đến milimét; các tổ hợp đường cong 20, 21, 22, 23, 24 nằm ở cạnh dưới thước và đường cong hàm tan 19 nằm ở biên cạnh bên phải thước. Trên thân thước, mô tả một vòng tròn lượng giác 12, một lỗ hình tam giác vuông 25 nằm trong vòng tròn lượng giác 12 và bốn trục sin 8, cos 9, tan 10, cot 11 để xác định giá trị của các hàm lượng giác tương ứng với các góc đặc biệt và của một góc bất kỳ và các lỗ hình hình học.

Theo một phương án khác của sáng chế, như được thể hiện trên H.1b. Thay phần vòng tròn lượng giác và bốn trục sin, cos, tan, cot như H.1a là lỗ hình tam giác vuông 26 có một góc nhọn và cạnh huyền có giá trị bằng một đơn vị và hai tam giác vuông ODA, OAC đồng dạng với nó, cho phép xác định giá trị các hàm lượng giác của một góc bất kỳ bằng phép đo giá trị đoạn thẳng;

Cấu trúc tổng thể của thước được mô tả trên H.2a như sau:

Phần ngoài cùng phía trên của thước là thước đo góc 1 có các vạch chia đến một độ, các chữ số ghi số độ theo giá trị chẵn cách nhau  $10^0$  một, chia làm hai nửa vòng, một nửa vòng 2 ở phía trên, từ trái qua phải ghi số độ từ  $0^0$  đến  $180^0$ , một nửa vòng 3 ở phía dưới, từ phải qua trái ghi số độ từ  $180^0$  đến  $0^0$ . Phần tiếp theo gồm một dãy các lỗ tròn thủng 5, đường kính dưới 3,0mm, tâm cách đều tâm của hình vành khăn 6, đánh dấu vị trí các góc cách đều nhau  $15^0$ . Tại vạch đánh dấu các góc đặc biệt bên cạnh ghi giá trị góc bằng radian 7 và các giá trị 4 của hàm cos và hàm sin của góc đó;

Phần thân thước phía dưới theo một phương án của sáng chế, gồm vòng tròn lượng giác 12 có bán kính định nghĩa bằng một đơn vị và bốn trục lượng giác gồm trục sin 8, trục cos 9, trục tan 10, trục cot 11. Trên vòng tròn và các trục lượng giác có các vạch đánh dấu để diễn tả giá trị của các hàm lượng giác tương ứng với các góc đặc biệt.

Một lỗ tam giác vuông 25 có một góc  $\alpha$ , cạnh huyền cũng giá trị bằng một đơn vị, các độ dài các cạnh của lỗ hình tam giác vuông diễn tả có giá trị bằng hàm  $\sin\alpha$  và  $\cos\alpha$ , đường thẳng nối tiếp cạnh huyền kéo dài cắt trục tan tại các điểm có độ dài trên trục tan diễn tả bằng giá trị hàm  $\tan\alpha$ , cắt trục cot tại các điểm có độ dài trên trục cot diễn tả bằng giá trị hàm  $\cot\alpha$ .

Phần thân thước phía dưới theo một phương án khác của sáng chế, diễn tả trên H.2b gồm một lỗ hình tam giác vuông 26 có một góc  $\alpha$ , cạnh huyền được định nghĩa có giá trị bằng một đơn vị. Tam giác 26 đồng dạng với hai hình tam giác vuông OAC, OAD liền kề. Nhờ tính chất đặc trưng của ba tam giác vuông đồng dạng, sáu giá trị lượng giác cơ bản gồm  $\sin\alpha$ ,  $\cos\alpha$ ,  $\tan\alpha$ ,  $\cot\alpha$ ,  $\sec\alpha$ ,  $\csc\alpha$  được mô tả giá trị bằng độ dài của các cạnh tam giác tương ứng, giúp người sử dụng thay vì phải tính toán phức tạp, có thể dễ dàng thực hành xác định được giá trị các hàm lượng giác bằng phép đo.

Tiếp theo trên thân thước, theo một phương án của sáng chế là lỗ hình tam giác vuông 14 có hai góc đặc biệt  $45^\circ$ ,  $90^\circ$ ; lỗ hình tam giác vuông 16 có ba góc đặc biệt  $30^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $90^\circ$  và lỗ hình đa giác 15 có các góc đặc biệt  $15^\circ$ ,  $40^\circ$ ,  $75^\circ$ ,  $140^\circ$ ,  $270^\circ$ . Dọc hai cạnh bên của hai lỗ hình tam giác vuông 14, 16 có vạch kẻ song song với cạnh huyền, cách đều nhau để người sử dụng vẽ được nhanh và chính xác các hình tam giác vuông đồng dạng. Trên cạnh huyền của hai lỗ hình tam giác vuông 14 và 16 có các vạch đánh dấu chân đường cao, điểm giữa cạnh và chân đường phân giác của góc vuông đối diện.

Cạnh biên phía dưới của thân thước gồm tổ hợp một dãy các đường cong 20, 21, 22, 23, 24 đặc trưng cho ít nhất một hoặc một nhóm các đường cong đồ thị dạng sóng của các hàm sin. Các đường cong là đại diện đồ thị hàm số  $y = \gamma \sin \frac{kx}{a}$ , hoặc  $y = \gamma \cos \frac{kx}{a}$ , với  $a$  là hệ số tỉ lệ,  $a \neq 0$ ,  $\gamma$  là hệ số biến dạng,  $k$  là hệ số chu kỳ, tốt hơn là  $a = 1,658$ ,  $\gamma = 1,2$ . Phần đường cong 20, có  $a < 0$ , biến  $x$  trong khoảng từ 0 đến  $\pi$  diễn tả bằng biên dạng cạnh thước, phần đường cong có biến  $x$  trong khoảng từ  $\pi$  đến  $2\pi$  diễn tả bằng vạch nét đứt trên thân thước. Các đường cong còn lại 21, 22, 23, 24 có  $a > 0$ , phần đường cong có biến  $x$  trong khoảng từ 0 đến  $\pi$  diễn tả bằng vạch nét liền trên thân thước, phần đường cong có biến  $x$  trong khoảng từ  $\pi$  đến  $2\pi$  diễn tả bằng biên dạng cạnh thước. Các đường cong có chu kỳ thay đổi theo hệ số  $k$  hoặc theo dãy cấp số nhân, với công bội

$k = 2^n$  ( $n$  là số nguyên dương) gồm  $T_{21} = T_{20}/2$  (với  $n = 1$ );  $T_{23} = T_{20}/2^2 = T_{20}/4$  (với  $n = 2$ );  $T_{24} = T_{20}/2^3 = T_{20}/8$  (với  $n = 3$ ). Riêng  $T_{22} = T_{20}/3$  là đường cong 22 được bổ sung với  $k = 3$  có chu kỳ trong khoảng giữa chu kỳ của  $T_{21}$  và  $T_{23}$ , nhằm giảm thiểu độ sai lệch giữa đường cong với đồ thị hàm số ở giữa hai chu kỳ. Điểm cực trị của đường cong có vạch đánh dấu.

Một phần cạnh biên bên trái thân thước là cạnh thẳng làm thước đo độ dài 13 dùng để kẻ đường thẳng và đo độ dài có vạch chia đến milimét. Một phần cạnh biên bên phải là đường cong 19 có dạng là một phần đường cong hàm lượng giác  $y = b \tan \frac{x}{b}$ , hoặc  $y = b \cot \frac{x}{b}$ , với  $b \neq 0$ ,  $x$  trong khoảng từ 0 đến  $\pi/2$ , tiệm cận với đường thẳng song song với cạnh thẳng bên trái thước.

Phần ngoài cùng phía trên của thước được thể hiện chi tiết trên H.3. Một nửa hình vành khăn làm thước đo góc 1 có các vạch chia đến  $1^\circ$ , trên thân gồm một nhóm các lỗ hình hình học là các lỗ tròn nhỏ 5, đường kính dưới 3,0 mm, có tâm nằm trên vạch nối từ tâm 6 của hình vành khăn đến vạch chia độ đánh dấu độ lớn của góc. Các tâm lỗ chênh cách đều nhau  $15^\circ$ , trong khoảng từ  $0^\circ$  đến  $180^\circ$ . Bên cạnh các lỗ đánh dấu các góc đặc biệt  $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 135^\circ, 150^\circ$  có ghi giá trị góc tính bằng radian 7 và ghi giá trị 4 của hàm cos, hàm sin của góc đó, giá trị hàm cos ghi trước, giá trị hàm sin ghi sau, tất cả để trong dấu ngoặc.

H.4.a đề cập chi tiết đến tổ hợp gồm vòng tròn lượng giác 12 có bán kính bằng một đơn vị độ dài, liên kết với một lỗ tam giác vuông 25, trục tọa độ xoy và bốn trục lượng giác sin 8, cos 9, tan 10, cot 11. Lỗ tam giác vuông 25 có một góc  $\alpha$ , cạnh huyền bằng bán kính vòng tròn cùng bằng một đơn vị, đỉnh của góc  $\alpha$  là tâm của vòng tròn lượng giác, đồng thời là điểm gốc của trục tọa độ xoy, trong đó trục sin 8 nằm trên trục oy trong phạm vi từ điểm (0; -1) đến điểm (0; +1), trục cos 9 nằm trên trục ox trong phạm vi từ điểm (1; 0) đến điểm (-1; 0), trục tan 10 song song với trục sin 8 đi qua điểm (1; 0), trục cot 11 song song với trục cos 9 đi qua điểm (0;1). Trên vòng tròn lượng giác 12 có các vạch đánh dấu các góc đặc biệt ghi giá trị bằng radian, trên bốn trục lượng giác có các vạch đánh dấu ghi giá trị hàm lượng giác. Nhờ tính chất tỉ lệ đồng dạng của tam giác vuông 25 với hai tam giác vuông O1A, O1B và định nghĩa bán kính vòng tròn

lượng giác và cạnh huyền lõ tam giác vuông 25 có cùng độ dài bằng một đơn vị, nên giá trị các hàm lượng giác của một góc  $\alpha$  bất kỳ được xác định bằng phép đo độ dài cạnh tam giác: độ dài cạnh đối diện góc  $\alpha$  của lõ tam giác 25 có độ dài bằng  $\sin\alpha$ , cạnh kề góc  $\alpha$  có độ dài bằng  $\cos\alpha$ , cạnh 1A trên trục tan bằng  $\tan\alpha$ , cạnh 1B trên trục cot bằng  $\cot\alpha$ , đoạn OA bằng  $\sec\alpha$ , đoạn OB bằng  $\csc\alpha$ .

H.4.b đề cập chi tiết phương án xác định giá trị các hàm lượng giác  $\sin\alpha$ ,  $\cos\alpha$ ,  $\tan\alpha$ ,  $\cot\alpha$ ,  $\sec\alpha$ ,  $\csc\alpha$  bằng phép đo độ dài cạnh tam giác, gồm: một lõ hình tam giác vuông 26 có một góc  $\alpha$  bất kỳ, có chu vi đồng dạng với hai hình tam giác vuông OAC và OAD, cạnh huyền OA được định nghĩa có giá trị bằng một đơn vị. Nhờ tính chất tỉ lệ đồng dạng của ba tam giác vuông OAB, OAC, OAD, trên thước có diễn tả phép đo độ dài  $AB = \sin\alpha$ , độ dài  $OB = \cos\alpha$ , độ dài  $AC = \tan\alpha$ , độ dài  $AD = \cot\alpha$ , độ dài  $OC = \sec\alpha$ , độ dài  $OD = \csc\alpha$ .

H.5a đề cập chi tiết đến tổ hợp lõ hình hình học có các góc đặc biệt bao gồm: một lõ hình tam giác vuông cân 14 có hai góc đặc biệt  $45^0$ ,  $90^0$ , lõ hình tam giác vuông 16 có ba góc đặc biệt  $30^0$ ,  $60^0$ ,  $90^0$  và lõ hình đa giác 15 có các góc đặc biệt  $15^0$ ,  $40^0$ ,  $75^0$ ,  $140^0$ ,  $270^0$ . Điểm khác biệt là hai góc  $15^0$  và  $40^0$  thường được sử dụng nhiều trong thực tế tính toán xây dựng. Góc  $15^0$  là góc thường sử dụng khi tính toán độ dài cắt tôn lợp mái, độ cao nóc nhà, v.v.. Góc  $40^0$  là góc sử dụng khi tính toán cầu thang trong nhà, độ cao trần nhà, số bậc thang, v.v.. H.5b diễn tả các hình tam giác vuông đồng dạng nhờ sử dụng các đường thẳng 17 cách đều nhau, song song với cạnh huyền của hai lõ tam giác vuông 14 và 16.

H.6a đề cập chi tiết tổ hợp một dãy các đường cong 20, 21, 22, 23, 24. Các đường cong này có hình dạng, kết cấu thỏa mãn quy luật đại diện cho ít nhất một hoặc một nhóm các đường cong đồ thị của hàm số dạng hình sin:  $y = \gamma \sin \frac{kx}{a}$ , với  $a$  là hệ số tỉ lệ  $a \neq 0$ ,  $\gamma$  là hệ số biên dạng,  $k$  là hệ số chu kỳ, tốt hơn là  $a = 1,658$ ,  $\gamma = 1,2$ . Phần đường cong 20, có  $a < 0$ , biến  $x$  trong khoảng từ 0 đến  $\pi$  diễn tả bằng biên dạng cạnh thước, phần đường cong 20 có biến  $x$  trong khoảng từ  $\pi$  đến  $2\pi$  diễn tả bằng vạch nét đứt trên thân thước. Các đường cong còn lại 21, 22, 23, 24, có  $a > 0$ , phần đường cong có biến  $x$  trong khoảng từ 0 đến  $\pi$  diễn tả bằng vạch nét liền trên thân thước, phần đường cong có

biến  $x$  trong khoảng từ  $\pi$  đến  $2\pi$  diễn tả bằng biên dạng cạnh thước. Tổ hợp các đường cong 20, 21, 22, 23, 24 dạng hình sin được lựa chọn có thể là một hoặc một nhóm, có hệ số chu kỳ thay đổi theo một dãy cấp số nhân với công bội  $k = 2^n$ , tốt hơn  $n$  là dãy số nguyên dương bắt đầu từ số 0. Đường cong  $T_{20}$ , có chu kỳ  $T_{20} = \frac{2\pi|a|}{k} = \frac{2\pi|a|}{2^n} = 2\pi|a|$  với  $k = 2^n$  ( $n = 0$ ). Các đường cong tiếp theo 21, 23, 24 có chu kỳ thay đổi theo cấp số nhân với công bội bằng  $k = 2^n$ , gồm  $T_{21} = \frac{2\pi|a|}{2^n} = \frac{2\pi|a|}{2}$  với  $n = 1$ . Ta có:  $T_{21} = T_{20}/2^1$  (với  $n = 1$ ). Tương tự:  $T_{23} = T_{20}/2^2 = T_{20}/4$  (với  $n = 2$ );  $T_{24} = T_{20}/2^3 = T_{20}/8$  (với  $n = 3$ ). Riêng  $T_{22} = T_{20}/3$  là đường cong bổ sung 22 có chu kỳ  $k = 3$  trong khoảng giữa chu kỳ của  $T_{21}$  và  $T_{23}$  nhằm giảm thiểu độ sai lệch giữa đường cong với đồ thị hàm số ở giữa hai chu kỳ. Điểm cực trị của các đường cong có vạch thẳng đứt nét đánh dấu.

H.6b diễn tả một ứng dụng sử dụng thước để vẽ đường cong đồ thị của một hàm số cụ thể  $y = \frac{3}{2} \sin(3x+1)$ . Nhờ sử dụng đường cong 23 cho phép vẽ đường cong đồ thị hàm số khảo sát gần như trùng khít với đường cong hàm số thực, sai lệch không đáng kể.

Tổ hợp dãy các đường cong 20, 21, 22, 23, 24 nêu trên, khi dịch chuyển cạnh thước dọc theo trục biến  $x$  đi một đoạn bằng độ lệch pha  $\frac{\pi|a|}{2k}$  thì các đường cong này cũng có hình dạng, kết cấu thỏa mãn quy luật đại diện cho ít nhất một hoặc một nhóm các đường cong đồ thị của hàm số dạng:  $y = \gamma \cos \frac{kx}{a}$ , (với  $a$  là hệ số tỉ lệ,  $a \neq 0$ ,  $\gamma$  là hệ số biến dạng,  $k$  là hệ số chu kỳ).

H.7a đề cập đến tổ hợp đường cong hàm tan 19, có hình dạng và kết cấu thỏa mãn đại diện cho ít nhất một hoặc một nhóm các đường cong đồ thị của hàm tan:  $y = b \tan \frac{x}{b}$ , với  $b \neq 0$ , tốt hơn là  $b = 0,65$ ,  $x$  trong khoảng từ 0 đến  $\pi/2$ , tiệm cận với đường thẳng song song với cạnh thẳng bên trái của thước đến vạch có ghi chữ "A" bên cạnh. Khi lật thước từ phải qua trái, đường cong 19 cũng có hình dạng, kết cấu đặc trưng thỏa mãn đại diện cho ít nhất một hoặc một nhóm các đường cong đồ thị dạng của hàm lượng

giác  $y = b \cot \frac{x}{b}$ , với  $x$  trong khoảng từ 0 đến  $\pi/2$ ,  $b$  là hệ số tỉ lệ có giá trị bất kỳ khác không ( $b \neq 0$ ).

H.7b diễn tả một ứng dụng sử dụng đường cong 19 của thước để vẽ đường cong đồ thị của một hàm số cụ thể  $y = \tan(2x + 5)$ . Nhờ sử dụng đường cong 19, vẽ đường cong đồ thị hàm số khảo sát gần như trùng khít với đường cong hàm số thực, độ sai lệch không đáng kể.

Thước theo sáng chế có thể được sản xuất theo các công nghệ sau: đúc từ khuôn thép trên máy ép nhựa theo công nghệ ép phun; Chế tạo khuôn cắt bằng các lưỡi dao thép, lưỡi dao được gia công theo hình dạng của sản phẩm. Sau đó dùng máy ép để ép khuôn dao lên tấm nhựa, bìa (hoặc các vật liệu mỏng khác), dập thành sản phẩm; Sử dụng máy cắt laze, plasma để cắt, khắc lên vật liệu nhựa, thép tấm mỏng, bìa, hoặc các loại vật liệu khác.

### **Hiệu quả đạt được của sáng chế**

Sử dụng thước kẻ này, học sinh, giáo viên, những người học tập môn toán phổ thông và xã hội có những lợi ích sau:

Hiểu được một cách đầy đủ, rõ ràng hơn về mối liên hệ giữa góc với các hàm số lượng giác gồm: hàm sin, hàm cos, hàm tan, hàm cot, hàm sec, hàm cosec và đồ thị biểu diễn chúng. Qua đó nâng cao được năng lực nhận thức về tính chất, đặc điểm của một hàm số lượng giác, một dạng hàm số siêu việt;

Thước tích hợp được cơ bản các yếu tố về góc, vòng tròn lượng giác, các trục số lượng giác, giúp cho người sử dụng xác định được nhanh giá trị của góc tính bằng radian, giá trị của các hàm lượng giác của tất cả góc đặc biệt trên thước, giảm bớt việc phải nhớ một cách máy móc những con số cụ thể về giá trị của các hàm lượng giác ở các góc đặc biệt một cách “quá tải” không cần thiết như hiện nay;

Nhờ việc tích hợp các yếu tố cơ bản đặc trưng về tính chất bằng nhau của hai góc sole, hai góc có cạnh tương ứng vuông góc và tính chất đồng dạng của tam giác vuông, thước giúp người sử dụng thực hành đo, dễ dàng xác định được giá trị các hàm lượng

giác của một góc bất kỳ, theo cách đo độ dài một đoạn thẳng khi quy giá trị một đơn vị đo về một số chẵn, thường lấy là 100 mm;

Nhờ việc tích hợp các lỗ hình hình học có các góc đặc biệt, các góc thường sử dụng trong thực tiễn xây dựng, các vạch kẻ song song, các vạch kẻ đánh dấu, giúp người sử dụng thực hành vẽ nhanh, vẽ đẹp, vẽ chính xác các góc gồm:  $15^0$ ,  $30^0$ ,  $45^0$ ,  $60^0$ ,  $75^0$ ,  $90^0$ ,  $105^0$ ,  $120^0$ ,  $135^0$ ,  $150^0$  và  $165^0$ , các tam giác vuông cân đồng dạng, các đường cao, đường phân giác, đường trung tuyến của tam giác vuông;

Nhờ các đường cong được đúc kết một cách khoa học, có tính toán chặt chẽ từ nhiều dạng hàm số lượng giác cơ bản trong chương trình môn toán phổ thông (hàm sin, hàm cos, hàm tan, hàm cot,...), thước cũng tích hợp đầy đủ các yếu tố cơ bản để vẽ các dạng đồ thị hàm số lượng giác (điểm cực trị, điểm uốn, trục đối xứng, đường tiệm cận,...) cho phép người sử dụng thước như một công cụ hữu hiệu, làm “dưỡng” để vẽ các đường cong đồ thị các hàm số lượng giác một cách nhanh chóng, đẹp và tương đối chính xác;

Thước có cấu tạo đơn giản, dễ sử dụng.

Như vậy, thước này là dụng cụ học tập đa chức năng lần đầu tiên đưa ra ở Việt Nam, được thiết kế tích hợp, chuyên sâu cho học sinh phổ thông và những người yêu thích môn toán về góc và hàm số lượng giác cơ bản trong chương trình môn toán phổ thông. Thước không còn là một dụng cụ sao chép đơn giản như các dụng cụ thước hiện có trên thị trường mà còn là một dụng cụ học tập tích cực, giúp học sinh không những hiểu sâu hơn kiến thức lượng giác cơ bản mà còn kích thích lòng say mê, khám phá cái mới, tính thẩm mỹ và lòng yêu thích toán học.

## Yêu cầu bảo hộ

1. Thước dùng trong giáo dục phổ thông về góc và hàm lượng giác, thước này bao gồm:

phần thân thước bao gồm ít nhất một nửa hình vành khăn (1) nằm ở phía trên của thước, một phần cạnh thẳng làm thước đo độ dài (13) nằm ở phía bên trái của thước, các tổ hợp đường cong đồ thị nằm ở cạnh dưới và biên cạnh bên phải của thước và các lỗ hình hình học;

khác biệt ở chỗ:

các lỗ hình hình học bao gồm: một lỗ hình tam giác vuông (16) có hai góc nhọn bằng  $30^0$  và  $60^0$ , nằm ở phía bên phải của thước và nằm cạnh đường cong hàm tan (19) là biên cạnh bên phải của thước; một lỗ hình tam giác vuông cân (14) ở phía bên trái của thước; một lỗ hình đa giác (15) nằm giữa hai lỗ hình tam giác vuông cân (14) và lỗ hình tam giác vuông (16); phía trên lỗ hình tam giác vuông cân (14) còn có một đường tròn lượng giác (12) và một lỗ hình tam giác vuông (25) có cạnh huyền bằng bán kính vòng tròn lượng giác, đặt trong một hệ trục tọa độ với các trục lượng giác  $\sin$  (8),  $\cos$  (9),  $\tan$  (10) và  $\cot$  (11).

2. Thước theo điểm 1, trong đó phần cạnh bên của một nửa hình vành khăn (1) làm thước đo góc có các vạch chia đến  $1^0$ .
3. Thước theo điểm 1, trong đó phần cạnh thẳng làm thước đo độ dài (13) có vạch chia đến milimét.
4. Thước theo điểm 1, trong đó các lỗ hình hình học còn bao gồm một nhóm các lỗ tròn nhỏ (5), đường kính dưới 3,0 mm, có tâm nằm trên vạch nối từ tâm của hình vành khăn đến vạch chia độ đánh dấu độ lớn của góc, các tâm lỗ có vị trí chênh lệch nhau  $15^0$ , trong khoảng từ  $0^0$  đến  $180^0$ , bên cạnh lỗ đánh dấu các góc đặc biệt (7) ghi giá trị bằng radian ( $\pi/6$ ;  $\pi/4$ ;  $\pi/3$ ;  $\pi/2$ ;  $2\pi/3$ ;  $3\pi/4$ ;  $5\pi/6$ ;  $\pi$ ), đồng thời ghi giá trị (4) của hàm cos, hàm sin của góc đó, giá trị hàm cos ghi trước, giá trị hàm sin ghi sau, tất cả để trong dấu ngoặc.

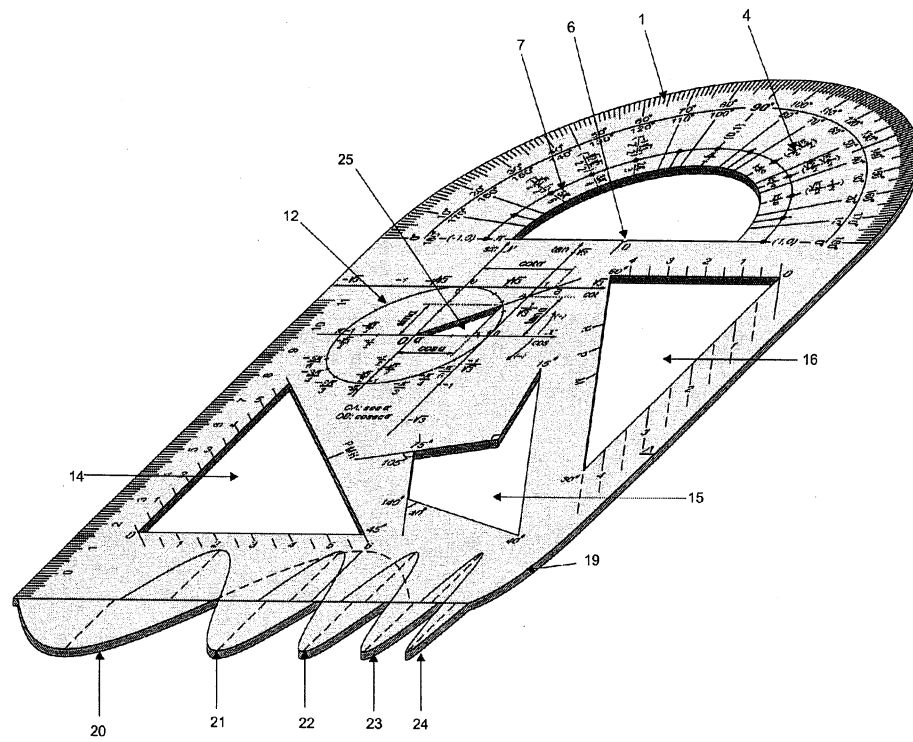


5. Thước theo điểm 1, trong đó lỗ hình tam giác vuông (25) được chọn có một góc kí hiệu là  $(\alpha)$  và cạnh huyền có độ dài được định nghĩa bằng một đơn vị.
6. Thước theo điểm 5, trong đó lỗ hình tam giác vuông (25) có đỉnh góc  $(\alpha)$  là tâm của vòng tròn lượng giác có bán kính bằng một đơn vị đồng thời cũng là tâm gốc của một hệ trục tọa độ (xoy), trục thẳng song song với trục (oy) đi qua điểm (1, 0) là trục tan, trục thẳng song song với trục (ox) đi qua điểm (0, 1) là trục cot, trên vòng tròn có các vạch đánh dấu vị trí diễn tả độ lớn của góc  $(\alpha)$  ghi giá trị bằng radian gồm:  $(-\pi/6; -\pi/4; -\pi/3; -\pi/2; -2\pi/3; -3\pi/4; -5\pi/6; -\pi)$ .
7. Thước theo điểm 6, trong đó lỗ hình tam giác vuông (25) gồm độ dài cạnh đối diện góc  $(\alpha)$  có giá trị bằng  $\sin\alpha$ , độ dài cạnh kề góc  $(\alpha)$  có giá trị bằng  $\cos\alpha$ ; tam giác vuông (OA1) đồng dạng với lỗ hình tam giác vuông (25) có cùng một góc  $(\alpha)$ , có độ dài cạnh kề góc  $(\alpha)$  bằng một đơn vị, độ dài cạnh (1A) đối diện góc  $\alpha$  nằm trên trục tan có giá trị bằng  $\tan\alpha$ ; tam giác vuông (OB1) đồng dạng với lỗ hình tam giác vuông (25) có cùng một góc sole bằng  $(\alpha)$  và độ dài cạnh đối diện góc  $(\alpha)$  bằng một đơn vị, độ dài cạnh (1B) kề góc  $(\alpha)$  nằm trên trục cot có giá trị bằng  $\cot\alpha$ .
8. Thước theo điểm 1, trong đó lỗ hình tam giác vuông cân (14) có hai góc nhọn bằng  $45^0$ , dọc hai cạnh bên có các vạch kẻ song song với cạnh huyền, cách đều nhau, trên cạnh huyền có vạch đánh dấu điểm chung của chân đường cao, điểm giữa của cạnh và chân đường phân giác của góc vuông đối diện.
9. Thước theo điểm 1, trong đó dọc hai cạnh bên của lỗ hình tam giác vuông (16) có các vạch kẻ song song với cạnh huyền, cách đều nhau, trên cạnh huyền có vạch đánh dấu chân đường cao, điểm giữa cạnh và chân đường phân giác của góc vuông đối diện.
10. Thước theo điểm 1, trong đó lỗ hình đa giác (15) có các góc đặc biệt:  $15^0$ ,  $40^0$ ,  $75^0$ ,  $140^0$  và  $270^0$ .
11. Thước theo điểm 1, trong đó tổ hợp đường cong đồ thị bao gồm một dãy các đường cong (19), (20), (21), (22), (23), (24) có hình dạng, kết cấu thỏa mãn hai quy luật gồm: Quy luật đại diện cho ít nhất một hoặc một nhóm các đường cong đồ thị của

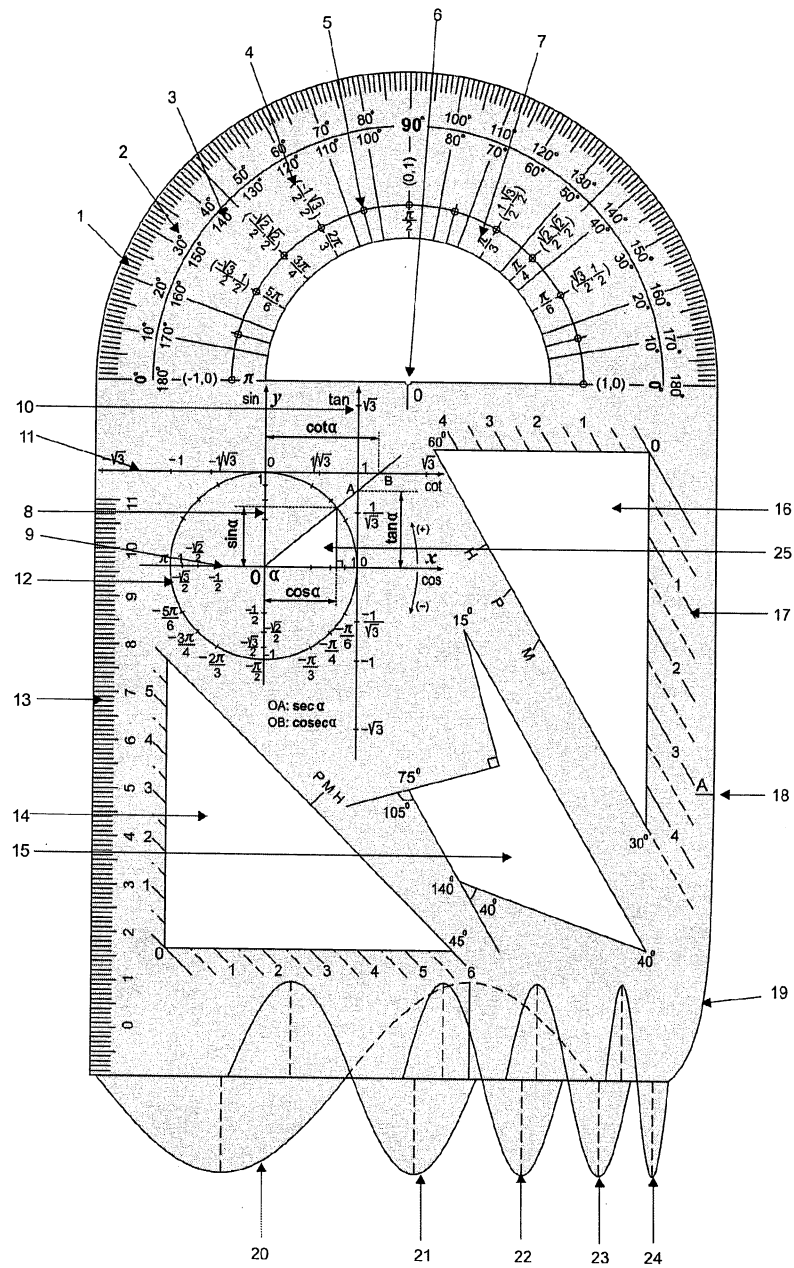
các dạng hàm số lượng giác; quy luật chọn mẫu, được chọn từ một trong các đường cong sau: đường cong dạng hàm sin, đường cong dạng hàm tan.

12. Thước theo điểm 11, trong đó tổ hợp một dãy các đường cong (20), (21), (22), (23), (24) có hình dạng, kết cấu thỏa mãn quy luật đại diện cho ít nhất một hoặc một nhóm các đường cong đồ thị của hàm số dạng hình sin:  $y = \gamma \sin \frac{kx}{a}$ , với  $a$  là hệ số tỉ lệ  $a \neq 0$ ,  $\gamma$  là hệ số biến dạng,  $k$  là hệ số chu kỳ.
13. Thước theo điểm 12, trong đó khi thước này dịch chuyển dọc theo trục biến số  $x$  đi một đoạn bằng độ lệch pha  $\frac{\pi|a|}{2k}$ , tổ hợp một dãy các đường cong (20), (21), (22), (23), (24) có hình dạng, kết cấu cũng thỏa mãn quy luật đại diện cho ít nhất một hoặc một nhóm các đường cong đồ thị của hàm số dạng:  $y = \gamma \cos \frac{kx}{a}$ , (với  $a$  là hệ số tỉ lệ,  $a \neq 0$ ,  $\gamma$  là hệ số biến dạng,  $k$  là hệ số chu kỳ),
14. Thước theo điểm 12, trong đó tổ hợp một dãy các đường cong (20), (21), (22), (23), (24) gồm các đường cong dạng hình sin được lựa chọn có thể là một hoặc một nhóm, có hệ số tỉ lệ  $a$  bất kỳ khác không, tốt hơn là  $a = 1,658$ ,  $\gamma = 1,2$ .
15. Thước theo điểm 12, trong đó tổ hợp một dãy các đường cong (20), (21), (22), (23), (24) gồm các đường cong dạng hình sin được lựa chọn có thể là một hoặc một nhóm, có hệ số chu kỳ thay đổi theo một dãy cấp số nhân với công bội  $k = 2^n$ , với  $n$  là dãy số nguyên dương bắt đầu từ số 0.
16. Thước theo điểm 12, trong đó tổ hợp một dãy các đường cong (20), (21), (22), (23), (24) gồm các đường cong dạng hình sin được lựa chọn có thể là một hoặc một nhóm, có hệ số chu kỳ thay đổi theo một dãy cấp số nhân với công bội  $k = 2^n$ , với  $k = 3$ .
17. Thước theo điểm 12, trong đó tổ hợp một dãy các đường cong (20), (21), (22), (23), (24) có vạch kẻ đánh dấu tại điểm cực trị.
18. Thước theo điểm 12, trong đó tổ hợp một dãy các đường cong (20), (21), (22), (23), (24) có một nửa chu kỳ là biên dạng cạnh của thước, một nửa chu kỳ nằm trên thước mô tả bằng vạch nét liền hoặc nét đứt.

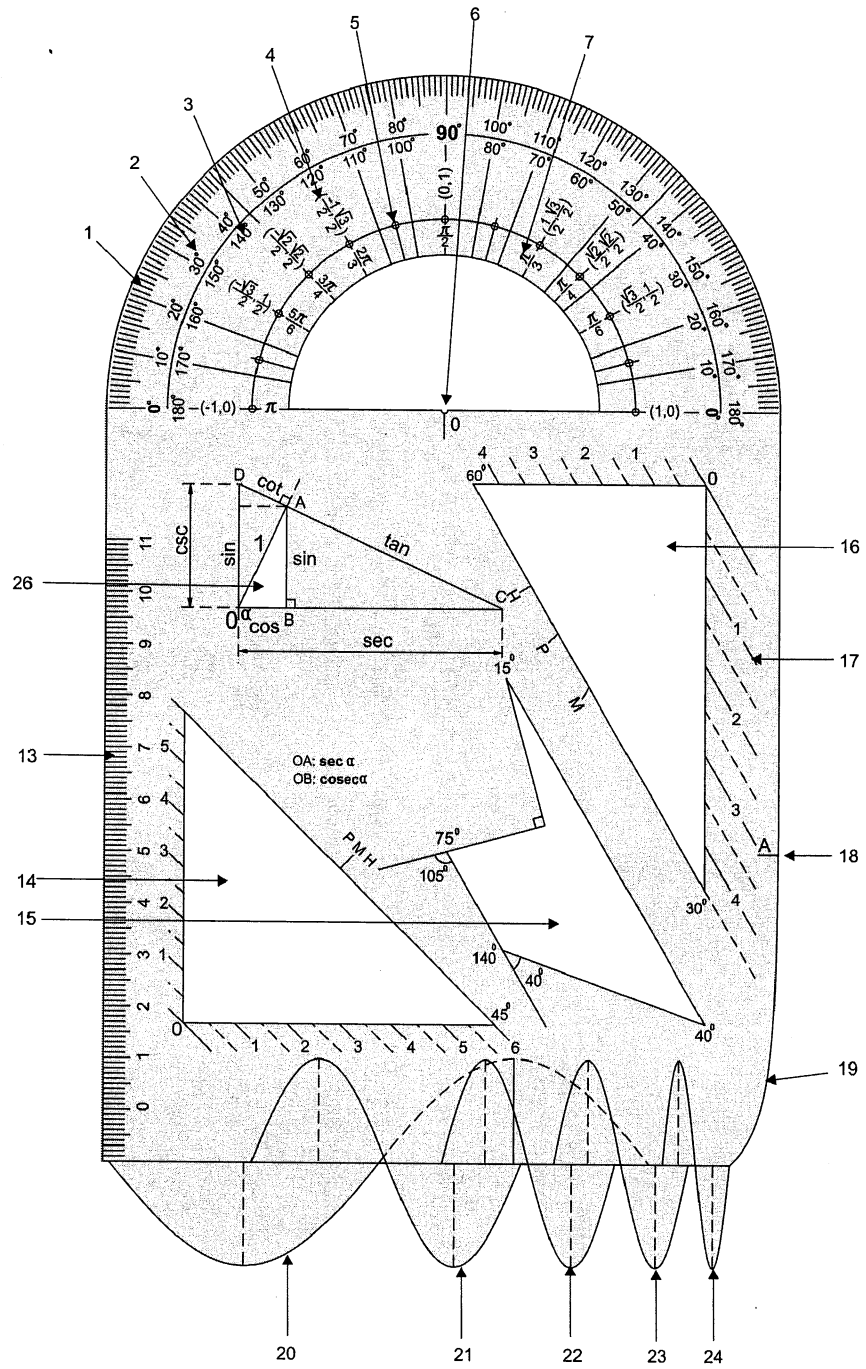
19. Thước theo điểm 11, trong đó đường cong hàm tan (19) có hình dạng, kết cấu thỏa mãn đại diện cho ít nhất một hoặc một nhóm các đường cong đồ thị của hàm tan:  $y = b \tan \frac{x}{b}$ , (với  $b \neq 0$ , tốt hơn là  $b = 0,55$ ,  $x$  trong khoảng từ 0 đến  $\pi/2$ ), tiệm cận với đường thẳng song song với cạnh thẳng bên trái của thước.
20. Thước theo điểm 19, trong đó khi thước lật từ phải qua trái, đường cong (19) có hình dạng, kết cấu cũng thỏa mãn đại diện cho ít nhất một hoặc một nhóm các đường cong đồ thị của hàm cot:  $y = b \cot \frac{x}{b}$ , (với  $b \neq 0$ ,  $x$  trong khoảng từ 0 đến  $\pi/2$ ).



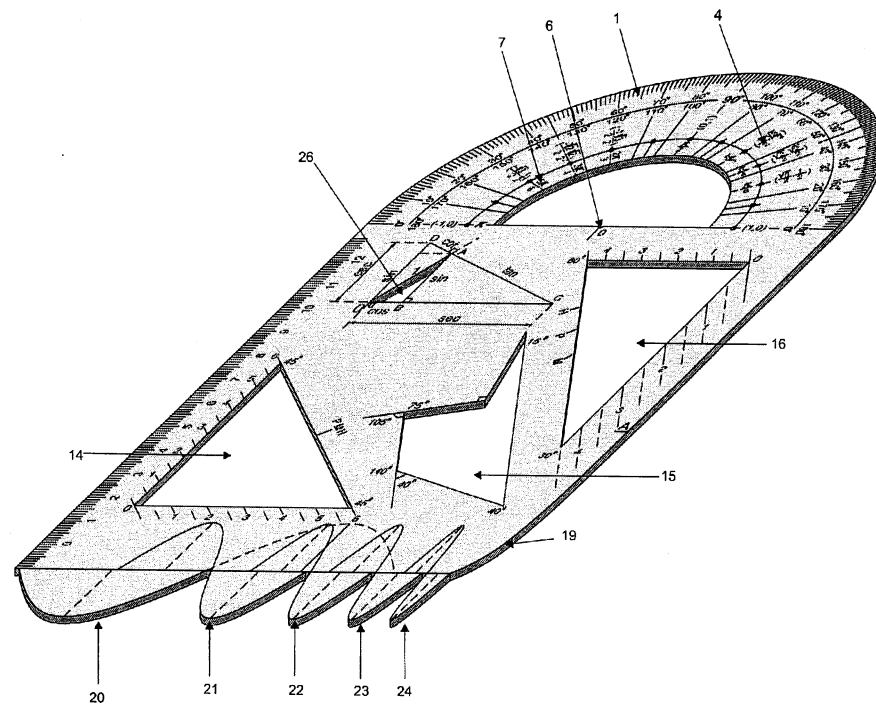
H.1a



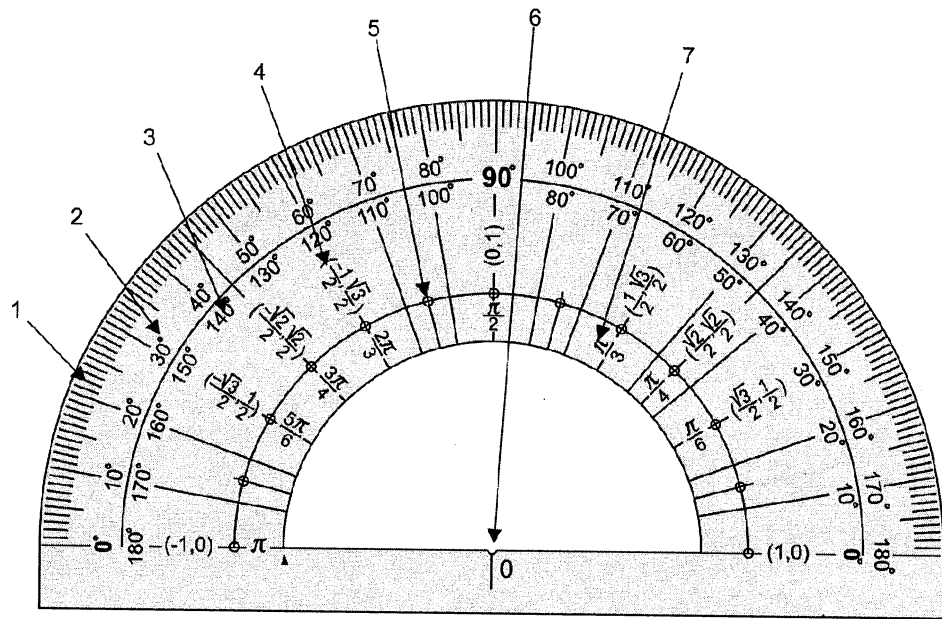
H.2a



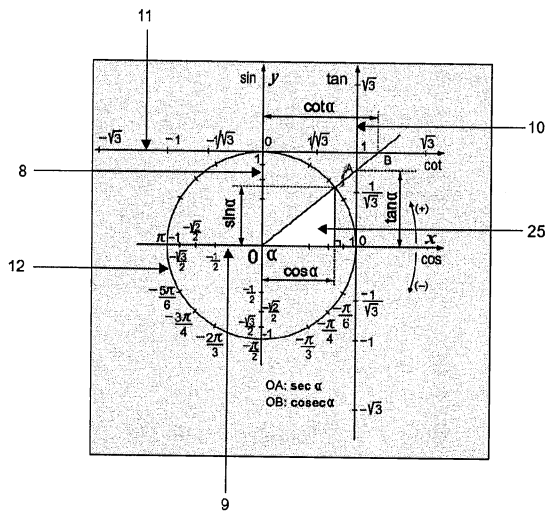
H.2b



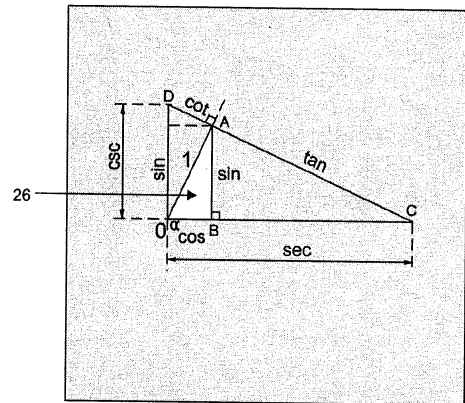
H.1b



H.3

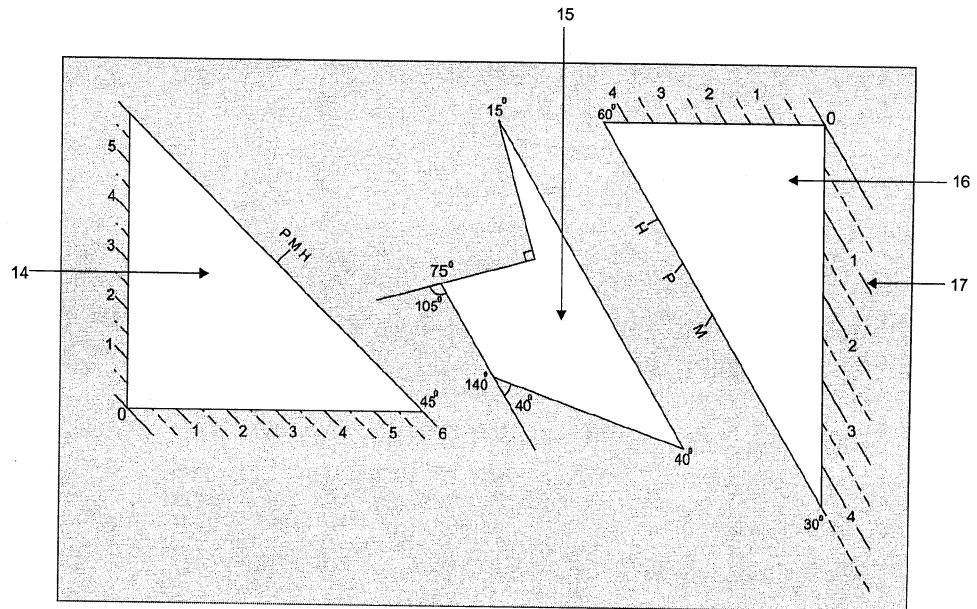


H.4.a

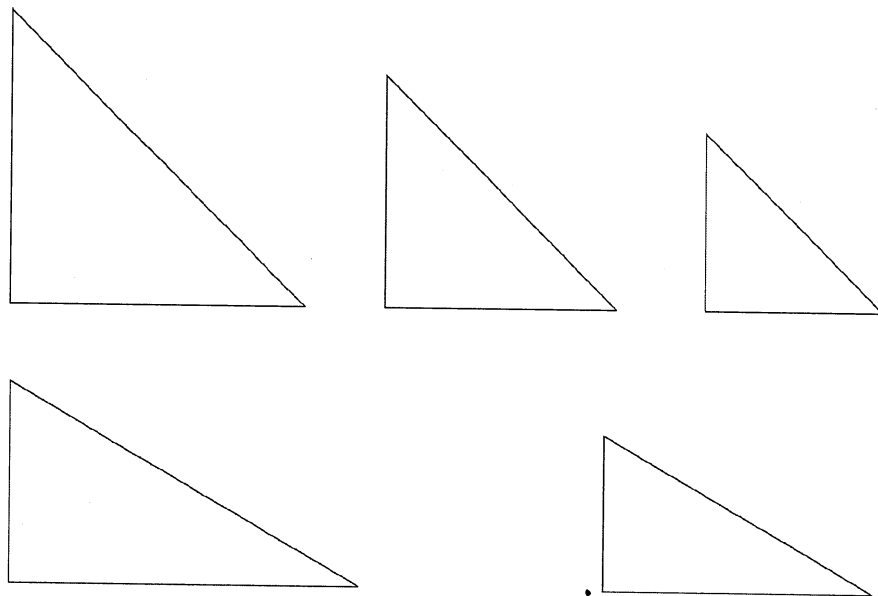


H.4.b

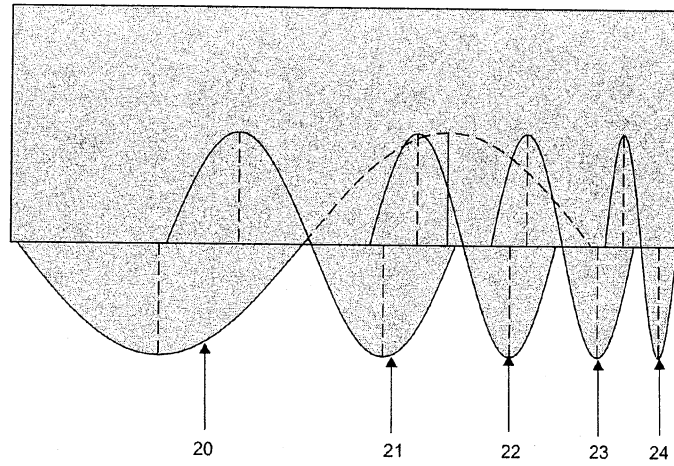




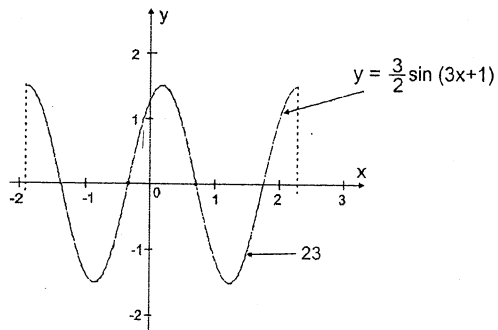
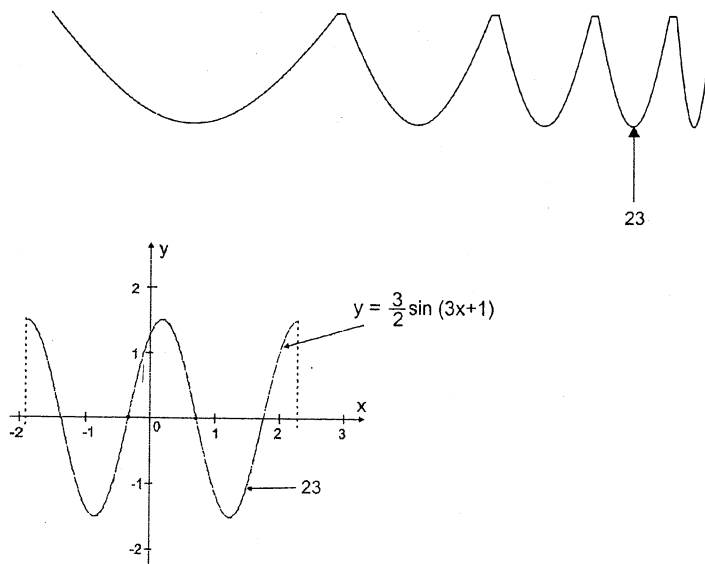
H.5.a



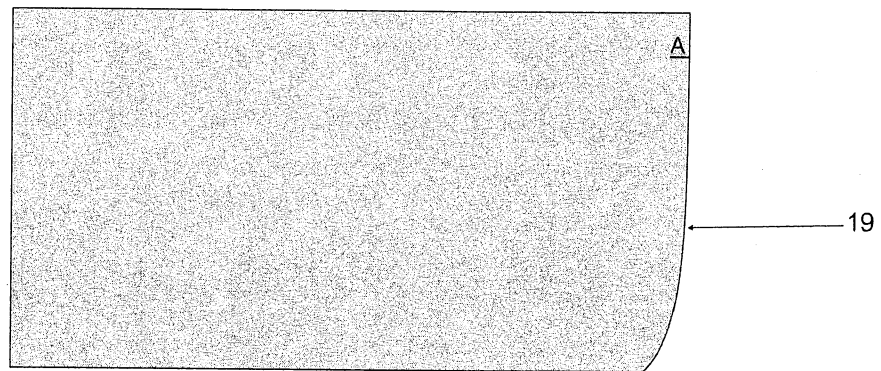
H.5.b



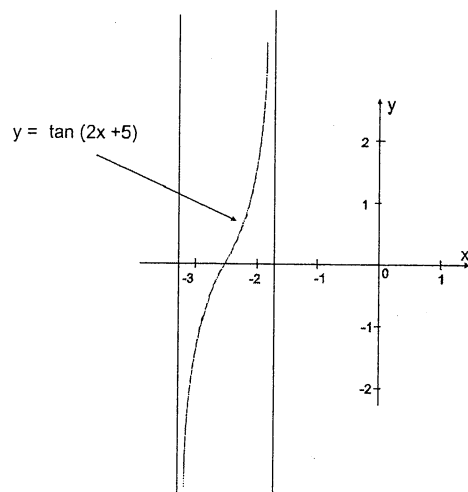
H.6.a



H.6.b



H.7a



H.7b